《数学分析》(I)*

“You can have lots of good ideas while walking on a straight line”.

主要教学参考材料（基本原则：看两本数学分析书，做一本数学分析习题集）
常庚哲，史济怀《数学分析教程》
小平邦彦《微积分入门》
华罗庚《高等数学引论》
卓里奇《数学分析》
阿黑波夫等著《数学分析讲义》
菲赫金哥尔茨《微积分学教程》
陶哲轩《陶哲轩实分析》
谢惠民，恽自求，易法槐，钱定边《数学分析习题课讲义》
Manfred Stoll《实分析引论》
Hardy《纯数学教程》

§1 创立实数系

参考教材：华罗庚先生的《高等数学引论》

注释：介绍实数系的构造不同的教师会有不同的偏好。Dedekind 的实数理论略显晦涩，Cauchy 的实数理论相对比较抽象，推荐华罗庚先生在其《高等数学引论》开创的十进制表示法引入实数的方案。这个方案清晰明了，易于为初入大学的学子们所接受，里面的处理手法将在实数系系列基本定理的建立过程中反复用到。

§2 几类收敛数列与收敛数列的基本性质

类型 1（对数函数）：$1/\log_\alpha n \quad (\alpha > 1)$
类型 2（多项式函数）：$1/n^\beta \ (\beta > 0)$
类型 3（指数函数）：$1/\gamma^n \quad (\gamma > 1)$
类型 4（阶乘函数）：$1/n!$

极限的四则运算，极限的保序性，夹逼定理，柯西定理 ($a_n \to a \Rightarrow \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \to a$)

---

*Designed by Liangpan LI in 2010.

§3　实数系系列基本定理

定理 1：单调有界定理（十进制表示法处理）
定理 2：致密性定理（十进制表示法处理）
定理 3：确界存在原理（十进制表示法处理）
定理 4：柯西收敛原理
鸽巢原理（无限个鸽子进有限个鸽笼必有一个鸽笼里有无限个鸽子）
级数的比较判别法（$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^\alpha}$，$\sum_{q_n\in\mathbb{Q}}\frac{1}{n^2}H(x-q_n)$，$\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{in\theta}$）
Dirichlet-Abel 判别法 (§9.4)
Riemann 重排定理 (§9.5)

定理 5：有限开覆盖定理（One of the deepest theorems in Analysis. To be proven later in the coming section.）

应用：迭代数列（观察 + 归纳 + 证明，蜘蛛网迭代法）
应用：数列的上下极限（十进制表示法处理）($\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n} a_k$)
应用：指数函数 ($e^{x+y}=e^xe^y$) 与阶乘函数 ($x! = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n^x}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x+k)}$)

注释 1：建议授课教师及早介绍级数的概念。数列和级数本来就是一个事物的两种表现形式，及早熟悉了级数的表示形式之后，在之后诸如处处连续处处不可导函数的构造，基于 Taylor 定理的一些常系数 ODE 的求解以及基于幂级数观点求函数的原函数的学习过程中，会让学生们信服级数才是真正自然的数学表现形式。

注释 2：实数系系列基本定理的证明和理解一向是数学分析课程教学的难点。但是细心审视一下这一系列基本定理，最难理解的应该就是有限开覆盖定理了。笔者推荐任课教师暂缓关于有限开覆盖定理的证明细节，这样处理的原因有二：一是不会有限开覆盖定理一样可以证明出连续函数的所有重要性质；二是在目前这个阶段就让学生们主要去玩玩数列和级数不也挺好吗？

§4　集合的基数理论

Cantor-Bernstein 引理（你比我多，我比你多，实际我俩一样多）
Cantor 集合论诞生定理：$\mathbb{N} \precnsim \mathbb{R}$
Cantor 集合论第二定理：$\mathbb{R}\sim\mathbb{R}^2$
Cantor 无最大基数定理：$X \precnsim \mathbb{P}(X)$
可数集：$\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}\sim\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}^2\sim\mathbb{Z}^2\sim\mathbb{Q}^2\sim\cdots$
连续统势：$(a,b)\sim[a,b]\sim\mathbb{Q}^c\sim\mathbb{P}(\mathbb{N})\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\mathbb{R}\sim\mathbb{R}^2\sim\mathbb{R}^3\sim\cdots\sim\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
注释：两节课的时间就可以完整介绍完 Cantor 的基数理论，建议授课教师介绍一番，即可以深化对于集合概念的认识，也是向伟大的 Cantor 致敬。

§5 连续函数的基本性质及其积分

Heine 归结原理：函数在某点为连续当且仅当在该点为序列连续。

Heine-Borel 有限开覆盖定理的证明（建议使用基于集合基数理论的证明）

连续函数的介值性质（闭区间套定理证法，有限开覆盖证法，拓扑的证法，寻找第一个零点的证法）

Cantor 一致连续性定理：有界闭区间上的连续函数必为一致连续

一致收敛的概念，Weierstrass M-Test (§10.2)

最值定理（有界闭性使然）

介值定理的绝妙应用：若 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为单射，则 f 必然不连续。

连续函数的积分理论

注释 1：Heine 归结原理是联系数列和连续函数的纽带定理。

注释 2：基于多边形区域的面积的概念以及内填外包的朴素想法，易于为平面区域引入上面积和下面积的概念。利用 Cantor 一致连续性定理，易于对于连续函数和坐标轴围成的区域论证其上面积和下面积是相等的，从而有一个恰当的面积的概念。提前介绍连续函数的积分这一超级直观的概念会为以后的教学带来较大的自由度，如 1) 介绍了微分学中的 Lagrange 中值定理就可以介绍 Newton-Leibniz 定理；2) 有了 Newton-Leibniz 定理就可以解释为什么要去求函数的原函数了；3) 介绍完 Lagrange 插值多项式和 Hermite 插值多项式之后就可以对光滑函数的积分建立误差估计了 (§7.10)；4) 为以后建立 Riemann 积分理论做好铺垫工作。

§6 导数的概念

反函数求导法则，四则运算规律，复合函数求导法则，高阶求导的 Leibniz 法则 (Newton 多项式展开定理，有异曲同工之妙）

§7 微分学系列中值定理及其应用

定理 1：Rolle 中值定理（研究函数最值即可）

定理 2：Lagrange 中值定理（类比单煎饼定理，时间位移图像，平均速度即为某个时刻的瞬时速度）

定理 3：Cauchy 中值定理（类比双煎饼定理，时间位移图像，平均速度之比即为某个时刻的瞬时速度之比）

定理 4：L'Hospital 法则（动态的 Cauchy 中值定理）

定理 5：广义 Rolle 中值定理

定理 6：插值多项式的存在性及误差估计（反复运用 Rolle 中值定理）

推论 1：Lagrange 插值多项式及其误差估计

推论 2：Hermite 插值多项式及其误差估计

推论 3 (Most Valuable Formula)：Lagrange 型余项的 Taylor 公式

定理 7：Peano 型余项的 Taylor 公式（反复运用 Cauchy 中值定理，致用于求函数极限，可彻底取代 L'Hospital 法则）

应用：函数的单调性，函数的凸性，Gronwall-Bellman 引理，函数的无穷 Taylor 展开，常微分方程，Newton-Leibniz 定理

补充：处处连续处处不可导函数的构造（§10.8），Darboux 定理（导函数的介值性）

§8　求导的逆运算

基本定理：连续函数必存在原函数（先用连续函数的积分的手法解决此定理，以后介绍了 Weierstarss 逼近定理再给一个新的证明）

基本观念：幂级数的收敛半径，逐项求导定理，逐项积分定理（§10.4）

处理反问题需要观察力（分部积分法换元法等处理技巧在实践中提高）

Weierstrass 逼近定理及其证明（层层剥皮化繁为简）（§10.6）

注释：建议在不定积分和定积分这两个章节之间插入介绍 Weierstarss 逼近定理。原因有二，一是可以给出连续函数必存在原函数一个新的证明，二是为研究 Riemann 积分的性质做好铺垫工作。

§9　内填外包的 Darboux 积分理论

预备知识：连续函数的积分理论

曲边梯形的面积（Darboux 和理论）

曲边梯形的面积（Riamann 和理论）

一维欧氏空间的 Lebesgue 测度理论（Step 1：开集紧集闭集的长度，Step 2：内测度与外测度，Step 3：测度）

函数 Riemann 可积性的 Lebesgue 刻画定理：有界函数 Riemann 可积当且仅当其为几乎处处连续

三维空间中光滑曲线的长度与三维空间中三维区域的体积

§10　联系连续函数积分理论与一般可积性理论的逼近思想

Riemann 引理，Duhamel 定理与一个周期性效果：

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = 0,$$

$$f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) g(\beta_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx.$$

经典例子之积分的绝对连续性